HATVÁNY, GYÖK, LOGARITMUS

Törtkitevőjű hatvány

Számítsuk ki az alábbi hatványok értékét (927–928. feladat).

K1 **927.**

a) $4^{\frac{1}{2}}$, $8^{\frac{1}{3}}$, $32^{\frac{1}{5}}$, $27^{\frac{1}{3}}$, $100^{\frac{1}{2}}$;

b) $25^{\frac{3}{2}}$, $27^{\frac{4}{3}}$, $64^{\frac{5}{6}}$, $81^{\frac{3}{4}}$, $16^{0,5}$;

c) $100^{-\frac{3}{2}}$, $64^{-\frac{1}{2}}$, $125^{-\frac{2}{3}}$, $49^{-\frac{3}{2}}$, $1000^{-\frac{1}{3}}$.

K2 **928.** *d)* $0,25^{-1,5}$, $0,125^{-\frac{5}{3}}$, $0,04^{-2,5}$, $\left(\frac{4}{49}\right)^{-\frac{5}{2}}$, $\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{5}{3}}$.

Írjuk fel törtkitevőmentesen (gyökjelek segítségével) az alábbi hatványokat (a hatványok alapja pozitív) (929–930. feladat).

K1 **929.**

a) $2^{\frac{1}{3}}$, $5^{\frac{3}{4}}$, $4^{\frac{2}{5}}$, $6^{\frac{1}{6}}$, $10^{\frac{1}{10}}$;

b) $8^{-\frac{1}{2}}$, $13^{-\frac{2}{3}}$, $54^{-\frac{3}{2}}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}$;

Írjuk fel törtkitevők segítségével a következő kifejezéseket

K1 **934.** $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{x^3}$, $\sqrt[5]{p^7}$, $\sqrt[n]{x^r}$, $\sqrt[2k]{m^6}$.

Exponenciális függvények

1. Ábrázolja és jellemezd a következő függvényeket!

a) $f(x)=2^x$;

b) $f(x)=3^x$;

c) $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$;

d) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

Exponenciális egyenletek

1. típus: Ha két tagból áll az egyenlet

2. Oldja meg a következő exponenciális egyenleteket!

a) $3^x=9$;

b) $2^x=32$;

c) $10^x=1000$

d) $4^x=16$;

e) $10^x=0,001$;

f) $3^x=\frac{1}{9}$;

g) $25^x=1$;

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=\frac{1}{8}$;

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=1$;

j) $\left(\frac{1}{3}\right)^x=3$;

k) $\left(\frac{1}{2}\right)^x=4$;

l) $2^x=\sqrt{2}$;

m) $5^x=\sqrt[3]{5}$;

n) $5^x=5\cdot\sqrt[3]{5}$;

o) $2^x=\frac{\sqrt{2}}{4}$;

p) $7^x=\frac{1}{\sqrt{7}}$;

q) $2^{x+1}=16$;

r) $6^{x-3}=36$;

s) $\left(\frac{1}{3}\right)^{7-x}=\frac{1}{27}$;

t) $10^{6x-4}=10\,000$;

u) $4^{2-5x}-1=0$;

v) $5^{2-3x}-24=1$

w) $7^x=0$

Exponenciális egyenletek

2. típus: Ha kettőnél több tagból áll az egyenlet.

3. Oldja meg a következő exponenciális egyenleteket!

elsőfokúra visszavezethető exponenciális egyenletek:

a) $4^x + 4^{x+1} = 320$;

b) $2^x + 2^{x-3} = 18$;

c) $3^x - 3^{x-2} = 24$;

d) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = \dfrac{40}{3}$

e) $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450$;

másodfokúra visszavezethető exponenciális egyenletek:

f) $10 \cdot 2^x - 4^x = 16$;

g) $9^x - 6 \cdot 3^x = 27$;

h) $2^x - 0{,}5^x = 3{,}75$;

i) $9^{x+1} - 4 \cdot 3^x - 69 = 0$;

j) $3^{4-x} + 3^{x-1} = 12$;

<u>Exponenciális egyenletrendszerek</u>

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán (1687–1695. feladat).

K1 **1687.**

a) (1) $3^x + 2 \cdot 2^y = 11$,
(2) $5 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = 3$;

b) (1) $2^x + 5 \cdot 7^y = 7$,
(2) $2^x - 3 \cdot 7^y = -1$.

K2 **1688.**

b) (1) $\lg x + 5 \cdot \lg y = 7$,
(2) $3 \cdot \lg x - 2 \cdot \lg y = 4$.

K2 **1689.**

a) (1) $\lg x - 2 \cdot \lg y = 3$,
(2) $5 \cdot \lg x + \lg y = 4$;

<u>Logaritmus</u>

Adjuk meg a következő kifejezések értékét a logaritmus definíciója alapján (942–943. feladat).

K1 **942.**

a) $\log_2 8$, $\log_3 9$, $\log_5 5$, $\log_6 36$, $\log_{2000} 1$;

b) $\log_4 16$, $\log_8 64$, $\log_{11} 121$, $\log_7 49$, $\log_2 32$;

c) $\log_5 \dfrac{1}{5}$, $\log_9 \dfrac{1}{3}$, $\log_6 \dfrac{1}{36}$, $\log_{25} \dfrac{1}{5}$, $\log_2 \dfrac{1}{64}$;

d) lg 1; lg 10; lg 100; lg 1000; lg 0,1; lg 0,01;

<u>Logaritmusfüggvények</u>

4. Ábrázolja és jellemezd a következő függvényeket!

a) $f(x) = \log_2 x$;

b) $f(x) = \log_3 x$;

c) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$;

d) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

<u>Logaritmikus egyenletek</u>

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán (1632–1638. feladat).

K1 **1632.**

a) $\log_2 x = 1$, $\log_3 x = -1$, $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$, $\log_3 x = -1$;

b) $\log_5(x+1) = 0$, $\log_7(4-x) = 2$, $\log_{\frac{1}{8}}(4-x) = -\frac{1}{3}$.

K2 **1633.**

a) $\log_9(5-3x) = -\frac{1}{2}$, $\log_{125}(2x+5) = \frac{1}{3}$, $\log_7(x^2-15) = 2$;

b) $\log_{36}(36+x) = 1$, $\lg(10x-2) = 2$, $\log_4(|x|-1) = 1$.

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán (1646–1662. feladat).

K1 **1646.**

a) $2\log_2 x = \log_2 x + 2$, $\log_3 x + \log_3 2 = 3$;

b) $\frac{1}{2}\lg x = 2\lg 3$, $\lg x = 1 - \lg 2$;

c) $\log_3 x = 2 - \log_3 5$, $\lg 2x = 2 + \lg 2$.

K1 **1647.**

a) $\lg 4x = \lg 20 - \lg 2$, $\log_4 2 + \log_4 x = \log_4(x+3)$;

b) $\lg(x-9) + \lg(2x-1) = 2$, $\lg(x-4) + \lg(x+3) = \lg(5x+4)$.

K1 **1649.** $\lg(x-13) - \lg(x-3) = 1 - \lg 2$

K2 **1650.**

a) $\log_5(x+1) + \log_5(x-1) = \log_5 8 + \log_5(x-2)$;

Logaritmikus egyenletrendszerek

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán (1687–1695. feladat).

K1 **1687.**

a) (1) $3^x + 2\cdot 2^y = 11$,
(2) $5\cdot 3^x - 3\cdot 2^y = 3$;

b) (1) $2^x + 5\cdot 7^y = 7$,
(2) $2^x - 3\cdot 7^y = -1$.

K2 **1688.**

b) (1) $\lg x + 5\cdot\lg y = 7$,
(2) $3\cdot\lg x - 2\cdot\lg y = 4$.

K2 **1689.**

a) (1) $\lg x - 2\cdot\lg y = 3$,
(2) $5\cdot\lg x + \lg y = 4$;

III. TRIGONOMETRIA

Skaláris szorzat

K1 **2429.** Számítsuk ki az **a** és a **b** vektorok skaláris szorzatát, ha $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 5$, és $(\mathbf{a},\mathbf{b})\sphericalangle = 40°$.

K2 **2430.** Számítsuk ki az **a** és a **b** vektorok skaláris szorzatát és a két vektor hajlásszögét, ha *a)* **a**(4; 3), **b**(6; 8); *b)* **a**(4; –3), **b**(2; 5); *c)* **a**(–2; 8), **b**(12; 9); *d)* **a**(–4; –5), **b**(6; –5).

Szinusztétel

41. Egy háromszög két szöge 40°-os és 65°-os. A 40°-os szöggel szemközti oldal 8 cm. Számolja ki a másik két oldalt!

42. Egy háromszög két oldala 5 cm és 7,3 cm. A 7,3 cm-es oldallal szemközti szög 34°-os. Mekkora a másik két szöge?
43. Egy háromszög két szöge 32° és 55°. A 32°-os szöggel szemben levő oldal 10 cm. Mekkora a többi oldal?
44. Egy háromszög egyik oldala 2 cm-rel nagyobb, mint a másik. E két oldallal szemközti szögek 46° és 77,3°. Mekkorák az oldalak?
45. Egy háromszög egyik oldala 1 cm-rel nagyobb, mint a másik. E két oldallal szemközti szögek 78,5° és 40°12'. Mekkorák az oldalak?
46. Egy háromszög két oldala 13 cm és 15 cm. A 15 cm-rel szemközti szöge 91°25'. Mekkora többi szög és oldal?

<u>Koszinusztétel</u>

47. Egy háromszög két oldala 10 m és 8 m. Közbezárt szögük 75°-os. Számítsd ki a harmadik oldalt!
48. Egy háromszög oldalai 4 cm, 6 cm és 7 cm. Mekkora a 7 cm-es oldallal szemközti szöge? Számítsd ki a többi szögét is!
49. Egy háromszög két oldala 7 cm és 9 cm, bezárt szögük 93°-os. Mekkora a harmadik oldal? Mekkora a másik két szög?
50. Egy paralelogramma átlói 10 és 17 cm-esek. Bezárt szögük 100°45'. Mekkorák a paralelogramma oldalai?
51. Egy háromszög oldalai 4 cm, 7 cm és 10 cm. Mekkora a legnagyobb szöge? Szögei szerint milyen típusú háromszög?
52. Egy paralelogramma átlói 3 m és 5 m-esek. A paralelogramma egyik oldala 2,2 m-es. Mekkora szöget zárnak be az átlók?
53. Egy paralelogramma két oldala 4,25 cm és 11,5 cm hosszú. Az egyik átlója 9 cm-es. Mekkorák a paralelogramma átlói?

<u>Trigonometrikus egyenletek</u>

54. Oldjuk meg a következő egyenleteket (fokban és radiánban is):
    a. $\sin x = 0{,}5$
    b. $\sin x = -0{,}9$
    c. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
    d. $\sin x = 1$
    e. $\sin x = 0$
    f. $\sin x = -1$
    g. $\sin x = 2$
    h. $\cos x = 0{,}5$
    i. $\cos x = -0{,}6$
    j. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
    k. $\cos x = 1$
    l. $\cos x = 0$
    m. $\cos x = -1$
    n. $\cos x = -1{,}5$
    o. $\mathrm{tg}\, x = 0{,}7$
    p. $\mathrm{tg}\, x = -2{,}5$
    q. $\mathrm{tg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$
    r. $\mathrm{tg}\, x = 1$
    s. $\mathrm{tg}\, x = 0$
    t. $\mathrm{tg}\, x = -1$
    u. $\mathrm{tg}\, x = -5$
    v. $\mathrm{ctg}\, x = 1{,}9$
    w. $\mathrm{ctg}\, x = -7{,}1$
    x. $\mathrm{ctg}\, x = \frac{\sqrt{3}}{3}$
    y. $\mathrm{ctg}\, x = 1$
    z. $\mathrm{ctg}\, x = 0$
    aa. $\mathrm{ctg}\, x = -1$
    bb. $\mathrm{ctg}\, x = -3$
55. $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; $2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0$; $\mathrm{tg}^2 x - 5\mathrm{tg} x + 6 = 0$
    $2\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0$; $3\sin^2 x - \cos^2 x = 3$; $3\cos^2 x - \sin^2 x = 2$

IV. KOORDINÁTAGEOMETRIA

Pontok, vektorok, szakaszok, egyenesek

56. Adott az A(3; 2) és B(–4; –2) pont.
    a. Adja meg a $\overrightarrow{AB}$ vektort koordinátáival!
    b. Adja meg az AB szakasz felezőpontját koordinátáival!

c. Adja meg az AB szakasz hosszát!
d. Adja meg a C pontot koordinátáival úgy, hogy az AC szakasz felezőpontja B pont legyen.

57. Adott az A(–1; 3) és B(5; –3) pont.
    a. Adja meg a $\overrightarrow{BA}$ vektort koordinátáival!
    b. Adja meg az AB szakasz hosszát!
    c. Adja meg a C pontot koordinátáival úgy, hogy az BC szakasz felezőpontja A pont legyen.

58. Egy háromszög csúcsai A(3; 4), B(–5; 3), C(2; –1).
    a. Számolja ki az $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ és $\overrightarrow{CA}$ vektorok koordinátáit!
    b. Számolja ki az oldalak felezőpontjainak koordinátáit!
    c. Számolja ki az *AB* oldal harmadolópontjainak koordinátáit!
    d. Számolja ki az oldalak hosszát!
    e. Írd fel az oldalak felezőmerőlegesének egyenletét!
    f. Számolja ki a felezőmerőlegesek metszéspontját! A háromszög melyik nevezetes pontja ez?
    g. Írd fel a háromszög *A* csúcsán átmenő magasságának egyenletét!
    h. Írd fel a háromszög oldalainak egyenletét!
    i. Számolja ki az BC oldal és a BC oldalhoz tartozó magasságvonal metszéspontjának koordinátáit!

59. Adott az ABC háromszög. Csúcsai: A(5; 1), B(–2; 2), C(0; –3).
    a. Adja meg a B csúcsból induló magasságvonal egyenletét! (Jelöld m_b-vel!)
    b. Adja meg az AC oldal egyenletét! (Jelöld b-vel!)
    c. Számolja ki és Adja meg m_b és b metszéspontjának koordinátáit!

60. Adott az ABC háromszög. Csúcsai: A(–3; –1), B(4; 1), C(3; –2).
    a. Adja meg a C csúcsból induló magasságvonal egyenletét! (Jelöld m_c-vel!)
    b. Adja meg az AB oldal egyenletét! (Jelöld c-vel!)
    c. Számolja ki és Adja meg m_c és c metszéspontjának koordinátáit!

Körök

61. Ábrázolja koordináta-rendszerben, majd írd fel annak a körnek az egyenletét, aminek középpontja (C) és sugara (r) a következők!
    a. C(4; 5), r = 3;
    b. C(5; –7), r= 4;
    c. C(–2; –3), r= 1;
    d. C(2; 0), r= 10;
    e. C(0; –1), r= 1;
    f. C(0; 0), r= 2

62. Határozzuk meg a következő egyenletekkel felírt körök középpontjának koordinátáit és sugarát! Ábrázoljuk a köröket!
    a. $(x-6)^2+(y-4)^2=25$;
    b. $(x-2)^2+(y-1{,}5)^2=100$
    c. $(x-8)^2+(y+1)^2=1$;
    d. $(x+4)^2+(y-4)^2=4$;
    e. $(x+1)^2+(y+2)^2=36$;
    f. $x^2+(y+7)^2=64$;
    g. $x^2+y^2=9$

Kör és egyenes kölcsönös helyzete

63. Adott az $(x+4)^2+(y-2)^2=25$ egyenletű kör.
   a. Adja meg koordinátáival a kör középpontját és sugarát!
   b. Ábrázolja a kört derékszögű koordináta-rendszerben!
   c. Számolja ki a körnek az x–y=–5 egyenletű egyenessel alkotott közös pontjait!

64. Adott az $(x-3)^2+(y+1)^2=16$ egyenletű kör.
   a. Adja meg koordinátáival a kör középpontját és sugarát!
   b. Ábrázolja a kört derékszögű koordináta-rendszerben!
   c. Számolja ki a körnek az y=x–2 egyenletű egyenessel alkotott közös pontjait!